Ariketa 1	Ariketa 2	Ariketa 3	Ariketa 4	Guztira

Azterketaren iraupena: Ordu bat eta erdi

OHARRA: Azterketako emaitza guztiak behar den bezala arrazoitu behar dira.

IZEN-ABIZENAK:

TALDEA:

1.- a) Kalkulatu $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)\cdot\left(1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)}{L\left(n^2\right)\cdot\sin\left(\frac{3n+1}{n^3}\right)}$ **(1.5 puntu)**

b) Kalkulatu $\lim_{n\to\infty} a^n\cdot\sin\left(\dfrac{1}{a^n}\right),\ \forall a>0$ **(1.5 puntu)**

a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)\cdot\left(1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)\right)}{L\left(n^2\right)\cdot\sin\left(\frac{3n+1}{n^3}\right)}\overset{(*)}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot L\left(\sqrt[n]{n}\right)\dfrac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{2}}{L\left(n^2\right)\cdot\dfrac{3n+1}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\frac{1}{n}L(n)\frac{2}{n^2}}{2\cdot L(n)\cdot\frac{3}{n^2}}=\frac{1}{3}$$

(*) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\overset{(Z-E)}{=}\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{n-1}=1 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt[n]{n}-1\sim L\left(\sqrt[n]{n}\right)$

b) $\forall a>0$

$$\lim_{n\to\infty}a^n=\begin{cases}0 & \forall a<1\\ 1 & a=1\\ \infty & \forall a>1\end{cases}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^n}=\begin{cases}\infty & \forall a<1\\ 1 & a=1\\ 0 & \forall a>1\end{cases}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{1}{a^n}\right)=\begin{cases}\nexists & \forall a<1\\ \sin(1) & a=1\\ 0 & \forall a>1\end{cases}$$

Orduan, $$\lim_{n\to\infty}a^n\cdot\sin\left(\frac{1}{a^n}\right)=\begin{cases}0\cdot mugatua=0 & \forall a<1\\ 1\cdot\sin(1)=\sin(1) & a=1\\ \infty\cdot 0=\lim_{n\to\infty}a^n\cdot\dfrac{1}{a^n}=1 & \forall a>1\end{cases}$$

2.- Aztertu serie hauen izaera:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}$ **(1.5 puntu)**

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{n^2+2}\right)+\frac{a^n}{3^{n+1}}\right),\quad \forall a>0$ **(1.5 puntu)**

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ non $a_n\geq 0\quad \forall n$

D´Alambert-en irizpidea erabiliz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)!)^3}{(3n+3)!}\cdot\frac{(3n)!}{(n!)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}=\frac{1}{27}<1$$

Beraz, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}$ konbergentea da.

b) $\forall a>0\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{n^2+2}\right)+\frac{a^n}{3^{n+1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)$

non $a_n=\sin\left(\dfrac{1}{n^2+2}\right)\geq 0$ eta $b_n=\dfrac{a^n}{3^{n+1}}\geq 0\quad \forall n$

Orduan, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{n^2+2}\right)+\frac{a^n}{3^{n+1}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

Eta, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+b_n\right)$ konbergentea da $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ eta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ konbergenteak dira

Azter ditzagun bi serie hauek:

$$\left.\begin{array}{l} a_n=\sin\left(\dfrac{1}{n^2+2}\right)\sim\dfrac{1}{n^2+2}\sim\dfrac{1}{n^2} \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\text{ konbergentea da}\end{array}\right\}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n\text{ konbergentea da}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{3^{n+1}}\text{ serie geometrikoa da} \\ r=\dfrac{a}{3}\Rightarrow\text{ konbergentea da}\Leftrightarrow|r|=\dfrac{a}{3}<1\Leftrightarrow a<3\end{array}\right\}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}b_n\begin{cases}\text{konbergentea da }\forall a<3\\ \text{dibergentea da }\forall a\geq 3\end{cases}$$

Beraz, $\forall a>0\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{n^2+2}\right)+\frac{a^n}{3^{n+1}}\right)\begin{cases}\text{konbergentea da }\forall a<3\\ \text{dibergentea da }\forall a\geq 3\end{cases}$

3.- a) Kalkulatu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n \cdot x^{n-1}}{2^n}$ berretura-seriearen batura, non balio duen adieraziz.

b) Zein da $f^{15)}(0)$-ren balioa, non f aurreko atalean lortutako berretura-seriearen funtzio-batura den?

(2.5 puntu)

$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n \cdot x^{n-1}}{2^n}$ $\quad \forall x \in (-R, R)$, eta integragarria da tarte horretan:

$$\int S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{2^n} \overset{(*)}{=} \frac{-\frac{x}{2}}{1+\frac{x}{2}} = -\frac{x}{2+x} \qquad \forall x \in (-2,2)$$

(*) Serie geometrikoa da, $r = -\frac{x}{2} \Rightarrow$ konbergentea da $\Leftrightarrow |r| = \frac{|x|}{2} < 1 \Leftrightarrow |x| < 2$

Eta, lortutako emaitza deribatuz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n \cdot x^{n-1}}{2^n} = \frac{-2-x+x}{(2+x)^2} = \frac{-2}{(2+x)^2} \qquad \forall x \in (-2,2) \qquad (1)$$

b) $f(x) = \frac{-2}{(2+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n \cdot x^{n-1}}{2^n}$ $\quad \forall x \in (-2,2)$, f-ren berretura-seriezko garapena da, Taylor-en seriea, hain zuzen ere. Beraz:

$$n-1=15 \;\Leftrightarrow\; n=16 \;\Rightarrow\; \frac{(-1)^{16} \cdot 16 \cdot x^{15}}{2^{16}} = \frac{f^{15)}(0)}{15!} \cdot x^{15} \;\Leftrightarrow\; f^{15)}(0) = \frac{16 \cdot 15!}{2^{16}} = \frac{16!}{2^{16}}$$

(1) Ez dut berretura-seriearen kobergentzia aztertu $x = \pm 2$ puntuetan ezin baita konbergentea izan puntu horietan. Tarte itxian konbergentea balitz, integragarria litzateke ere tarte horretan, baina integratzean serie geometrikoa lortu dugu, eta, dakigunez, serie geometrikoak konbergentea dira, bakarrik, tarte irekietan.

4.- Lortu $\arctan\left(\frac{1}{10}\right)$-ren balio hurbildua, egindako errorea 10^{-4} baino txikiagoa dela ziurtatuz.

(1.5 puntu)

$\arctan\left(\frac{1}{10}\right)$-ren balio hurbildua lortzeko, $f(x)=\arctan x$ funtzioaren berretura-seriezko garapena edo Maclaurinen polinomioa erabil dezakegu. Era batera edo bestera, behin lortu balio hurbildua, hurbilketa horretan egindako errorea mugatu beharko dugu. Berretura-seriezko garapenaren bitartez egitean, Leibniz-en teorema egiaztatzen duen serie alternatua eduki beharko dugu. Maclaurinen polinomioa erabiltzen badugu, berriz, Lagrange-ren hondarra definitu beharko dugu. Lehen batean, bigarren aukera hau konplikatuagoa litzateke, *f*-ren *n*+1-garren deribatua $\left(f^{n+1)}(x)\right)$ ezagutu beharko dugulako. Has gaitezen, orduan, *f*-ren berretura-seriezko garapena lortzen:

$$f(x)=\arctan x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{1}{1+x^2}\overset{(*)}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{2n}\quad \forall x\in(-1,1)$$

(*) Serie geometrikoaren batura da, $r=-x^2\Rightarrow$ konbergentea da $\Leftrightarrow |r|=x^2<1$

Eta, lortutako emaitza integratuz:

$$f(x)=\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot x^{2n+1}\quad \forall x\in(-1,1) \qquad (1)$$

Orain, $x=\frac{1}{10}$ puntuan ordezkatuz: $\arctan\left(\frac{1}{10}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{10^{2n+1}\cdot(2n+1)}$

Serie alternatua da, eta Leibniz-en teorema egiaztatzen du, orduan $|S-S_n|<|a_{n+1}|$

non $S=\arctan\left(\frac{1}{10}\right)$ seriearen batura zehatza, $a_n=\frac{(-1)^n}{10^{2n+1}\cdot(2n+1)}$, eta, S_n lortu nahi dugun balio hurbildua diren.

Beraz, hurbilketan egindako errorea 10^{-4} baino txikiagoa izan dadin:

$$|S-S_n|<|a_{n+1}|=\frac{1}{10^{2n+3}\cdot(2n+3)}\le\frac{1}{10^4}\Leftrightarrow 10^{2n+3}\cdot(2n+3)\ge 10^4\Leftrightarrow 10^{2n-1}\cdot(2n+3)\ge 1$$

$n=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{3}{10}<1$

$n=1 \quad\Rightarrow\quad 50>1$

Beraz, $\arctan\left(\frac{1}{10}\right)\simeq\frac{1}{10}-\frac{1}{10^3\cdot 3}=\frac{1}{10}-\frac{1}{3000}=\frac{290}{3000}=\frac{29}{300}$

(1) Kasu honetan ez dut aztertu ea lortutako berretura-seriezko garapenak $x=\pm 1$ puntuetan balio duen informazio hori behar ez dudalako.